Jurnal Matematika dan Aplikasi

deCartesiaN

ISSN:2302-4224

Journal homepage: https://ejournal.unsrat.ac.id/index.php/decartesian

deCartesiaN

Pemodelan Biaya Garansi Dua Dimensi Polis FRW (*Non-Renewing Free Replacement Warranty*) dengan Strategi Penggantian untuk *Oil Filter* Mobil

Nur Rohman[1], Tundjung Mahatma[1], Leopoldus Ricky Sasongko[1]*

[1]Program Studi Matematika–Fakultas Sains dan Matematika–UKSW, Jln. Diponegoro No. 52-60, Salatiga 50711, Indonesia
* Corresponding author: leopoldus.sasongko@staff.uksw.edu.

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh model biaya garansi dua dimensi polis *non-renewing free replacement warranty* dengan strategi penggantian untuk komponen pada mobil yaitu *oil filter*. Model biaya garansi tersebut melibatkan distribusi bivariat atau copula. Perilaku data bivariat (umur dan penggunaan) kegagalan pertama komponen *oil filter* mobil dipelajari pada penelitian ini. Kecocokan data bivariat terhadap suatu distribusi bivariat atau copula itu didasarkan pada ukuran statistik *Cramèr-von Mises* dengan pengujiannya dibantu dengan simulasi *parametric bootstrap*. Biaya garansi diperoleh berdasarkan model biaya tersebut dan dihitung dengan menggunakan metode *mean value theorem for integrals*. Hasil penelitian ini berupa model dan biaya garansi dua dimensi polis *non-renewing free replacement warranty* dengan strategi penggantian untuk *oil filter* mobil. Model yang terbaik adalah model yang melibatkan copula Clayton dengan distribusi marginal umur adalah distribusi Weibull dan marginal penggunaan adalah disribusi Lognormal. Model tersebut dipilih berdasarkan ukuran statistik *Cramèr-von Mises* yang relatif kecil dengan *p-value* terbesar dibanding model-model lain melalui bantuan simulasi *parametric bootstrap*. Melalui model terbaik tersebut, biaya garansi dihitung dengan menggunakan metode *mean value theorem for integrals* yang diusulkan dalam penelitian ini. Biaya garansi tersebut diperoleh berdasarkan masa garansi dua dimensi *oil filter* mobil yang tergantung pada umur dan penggunaannya. Biaya garansi naik sebanding dengan umur dan penggunaan yang meningkat.

INFO ARTIKEL

Diterima : 16 Desember 2017
Diterima setelah revisi : 8 Januari 2018
Tersedia *online* : 31 Maret 2018

Kata Kunci:
Model Biaya Garansi Dua Dimensi,
Non-Renewing Free Replacement Warranty,
Strategi Penggantian,
Data Bivariat,
Umur dan Penggunaan,
Copula

1. PENDAHULUAN

Banyak hal harus dipertimbangkan konsumen sewaktu membeli mobil. Salah satu hal yang penting bagi konsumen adalah bahwa mobil yang akan dibelinya dapat dipergunakan dalam jangka waktu yang panjang dengan jaminan tertentu serta ketersediaan suku cadang yang memadai. Jaminan tersebut dapat diperoleh melalui garansi. Garansi merupakan suatu kontrak antara produsen dan konsumen yang mewajibkan produsen manufaktur untuk memberikan kompensasi (perbaikan, penggantian, pengembalian uang, dsb) kepada konsumen terhadap kegagalan-kegagalan item atau komponen pada produk yang terjadi selama masa garansi yang ditentukan sejak transaksi jual-beli produk [1].

Garansi selalu berkaitan erat dengan polis yang diterapkan di dalam garansi. Hal-hal mengenai taksonomi, kategori, jenis, dan definisi berbagai polis garansi dijabarkan lengkap oleh [2]. Salah satu polis garansi yang sering diterapkan pada kendaraan bermotor di Indonesia adalah polis *non-renewing free replacement warranty* (atau disebut polis FRW). Dalam polis FRW, produsen berkewajiban melakukan perbaikan atau penggantian satu atau lebih komponen pada produk yang gagal dalam masa garansi dengan biaya gratis pada konsumen [1]. Apabila terjadi kegagalan komponen, setelah dilakukan pembetulan atau pemulihan (*rectification*) pada komponen yang gagal, masa garansi tidak diperbarui atau tetap berakhir seperti yang ditentukan di dalam kontrak garansi saat transaksi jual-beli pertama kali [1]. Berdasarkan hal-hal tersebut, polis garansi mempengaruhi biaya garansi yang ditanggung oleh produsen.

Beberapa peneliti telah membahas hal mengenai garansi dua dimensi polis FRW dengan strategi penggantian. Salah satu peneliti tersebut adalah Baik, dkk., pada [3] dimana, selain membahas pada strategi penggantian, dibahas juga strategi perbaikan minimum sebagai pembanding model biaya garansi dengan strategi penggantian. Model yang diusulkan oleh [3] adalah model yang melibatkan distribusi Weibull yang diusulkan oleh Lu-Bhattacharyya pada [4]. Sasongko pada [1] melanjutkan penelitian oleh [3] untuk model dengan strategi penggantian yang melibatkan fungsi copula. Berdasarkan [1], model yang melibatkan copula menjadi lebih variatif sebagai akibat fungsi copula dapat memodelkan marginal-marginal yang berasal dari keluarga-keluarga distribusi yang berbeda

Penelitian ini mempertimbangkan pemberian garansi *oil filter* mobil yang *non-repairable*. Data diperoleh dari salah satu *dealer* mobil di Jawa Tengah. Data tersebut berkaitan dengan penggantian komponen *oil filter* dari salah satu *brand* mobil di *dealer* tersebut. Data penggantian *oil filter* berkisar pada awal tahun 2011 sampai awal tahun 2016 untuk *brand* mobil yang sama. Data tersebut terdiri atas umur dan penggunaan saat *oil filter* akan diganti dengan *oil filter* yang baru. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh model dan biaya garansi dua dimensi polis FRW dengan strategi penggantian untuk komponen *oil filter* tersebut. Hal penting mengenai perolehan model tersebut dalam penelitian ini dapat menjadi kontribusi keilmuan bagi berbagai pihak seperti produsen mobil, terkhusus atau dapat juga produsen *oil filter* mobil, dan peneliti maupun pengamat kebijakan garansi dua dimensi.

2. DASAR TEORI DAN METODE PENELITIAN

2.1. Biaya Garansi

Biaya garansi dinyatakan oleh peubah acak kerugian aggregat A yaitu

$$A = \sum_{i=1}^{N} L_i = L_1 + L_2 + \cdots + L_N \qquad (1)$$

dengan N adalah peubah acak yang menyatakan banyak kegagalan yang terjadi dan L_i adalah peubah acak yang menyatakan besar biaya yang dikeluarkan untuk pembetulan ke-i. Untuk kasus komponen adalah *non-repairable*, disini diasumsikan harga per unit (ℓ) komponen tersebut tidak berubah sepanjang waktu, ekspektasi biaya garansi didefinisikan oleh

$$E[A] = \ell E[N] \qquad (2)$$

2.2. Proses Pembaruan Dua Dimensi

Berdasarkan [3], [5], dan [6], model garansi dua dimensi dipengaruhi model kegagalan yang melibatkan proses pembaruan dua dimensi di bidang $[0,x) \times [0,y)$ sehingga ekspektasi biaya garansi di masa garansi $[0,x) \times [0,y)$ adalah $E[N] = M(x,y)$ dengan

$$M(x,y) = H(x,y) + \int_0^x \int_0^y M(x-t, y-s)\,dH(t,s) \qquad (3)$$

2.3. Metode *Mean Value Theorem for Integrals* (MeVTI) untuk menghitung $M(x,y)$

Disini estimasi $M(x,y)$ pada (3) dilakukan secara numerik melalui metode *mean value theorem for integrals* (MeVTI) [1]. Sebelum menerapkan metode MeVTI, dilakukan perubahan peubah yaitu $a = x - t$ dan $b = y - s$ pada (3). Setelah itu, MeVTI pada ujung kiri diterapkan untuk memperoleh estimasi $M(x,y)$ yang selanjutnya dinyatakan oleh $\widehat{M}(x,y)$. Interval $[0,x)$ dan $[0,y)$ masing-masing dibagi sebanyak n dan m bagian sama panjang, $\Delta x = \frac{x}{n}$ dan $\Delta y = \frac{y}{m}$, sehingga diperoleh $n \times m$ persegi panjang $[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$ untuk $x_i = i\Delta x$, $i = 0,1,2,\dots,n$, $y_j = j\Delta y$, $j = 0,1,2,\dots,m$. Nilai $\widehat{M}(x,y)$ diperoleh melalui

$$\widehat{M}(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[\left(1 + \widehat{M}(x_{i-1}, y_{j-1})\right) \Delta_{x_{i-1}}^{x_i} \Delta_{y_{i-1}}^{y_i} H(x-a, y-b)\right] \qquad (3)$$

dengan terlebih dahulu memperoleh

$$\widehat{M}(x_p, y_q) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \left[\left(1 + \widehat{M}(x_{i-1}, y_{j-1})\right) \Delta_{x_{i-1}}^{x_i} \Delta_{y_{i-1}}^{y_i} H(x_p - a, y_q - b)\right] \qquad (4)$$

untuk $p = 0,1,2,\dots,n-1$, $q = 0,1,2,\dots,m-1$ dan syarat awal $\widehat{M}(0,0) = M(0,0) = 0$, $\widehat{M}(0,y_q) = \widehat{M}(x_p, 0) = 0$. Metode ini diusulkan oleh [1].

2.4. Distribusi Bivariat

Berdasarkan (3), ekspektasi biaya garansi di masa garansi $[0,x) \times [0,y)$, yaitu $M(x,y)$, melibatkan distribusi bivariat $H(x,y)$. Beberapa keluarga distribusi bivariat diusulkan dalam analisis garansi. Salah satu keluarga distribusi bivariat tersebut adalah distribusi bivariat Weibull yang diusulkan oleh Lu-Bhattacharyya pada [4] yang mana distribusi bivariat tersebut dinyatakan oleh fungsi survival bivariat berikut ini

$$\overline{H}_{LB,\delta}(x,y) = \exp\left\{-\left[\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\delta}} + \left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\delta}}\right]^{\delta}\right\} \qquad (5)$$

2.5. Copula

Copula (bivariat) adalah suatu fungsi distribusi bivariat dengan marginal-marginalnya berdistribusi seragam [0,1]. Copula C didefinisikan oleh

$$C(u,v) = Pr[U \le u, V \le v] \qquad (6)$$

untuk U dan V berdistribusi seragam di [0,1]. Menurut Teorema Sklar pada [7], jika H adalah fungsi distribusi bivariat dengan fungsi-fungsi distribusi marginal F dan G, maka terdapat suatu copula C untuk semua (x,y) sedemikian hingga

$$H(x,y) = C\big(F(x), G(y)\big) \qquad (7)$$

Berdasarkan [7], berkaitan dengan suatu copula C, salah satu ukuran keterhubungan antara dua peubah acak yaitu Kendall's *tau* (τ) didefinisikan oleh

$$\tau = 4 \iint_{I^2} C(u,v)\,dC(u,v) - 1 \qquad (8)$$

2.6. Copula Archimedean

Keluarga copula Archimedean adalah fungsi-fungsi copula yang memiliki kekhasan yaitu memiliki satu parameter kebergantungan (θ) dan dapat dibentuk dari suatu fungsi pembangkit copula φ [7]. Copula Archimedean (bivariat) didefinisikan oleh

$$\varphi_\theta\big(C(u,v)\big) = \varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v) \quad (9)$$

Estimasi parameter copula Archimedean (θ) berdasarkan Kendall's *tau* (τ) pada (8) dapat diperoleh dengan mencari solusi persamaan berikut ini

$$\tau = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi_\theta'(t)}\,dt \quad (10)$$

seperti pada [7]. Selanjutnya dijelaskan empat jenis keluarga copula Archimedean berdasarkan [7].

Fungsi **copula Clayton** didefinisikan oleh

$$C_{C,\theta}(u,v) = \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (11)$$

dengan $\theta \in (0,\infty)$. Fungsi pembangkit copula Clayton didefinisikan oleh

$$\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta} - 1\right) \quad (12)$$

Parameter θ copula Clayton diperoleh dari persamaan (10) berdasarkan (12) yaitu

$$\theta = \frac{2\tau}{1-\tau} \quad (13)$$

Fungsi **copula Gumbel** didefinisikan oleh

$$C_{G,\theta}(u,v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) \quad (14)$$

dengan $\theta \in [1,\infty)$. Fungsi pembangkit copula Gumbel adalah

$$\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta \quad (15)$$

Parameter θ copula Gumbel melalui solusi persamaan (10) berdasarkan (15) adalah

$$\theta = \frac{1}{1-\tau} \quad (16)$$

Fungsi **copula Frank** didefinisikan oleh

$$C_{F,\theta}(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u} - 1\right)\left(e^{-\theta v} - 1\right)}{e^{-\theta} - 1}\right) \quad (17)$$

dengan $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Fungsi pembangkit copula Frank adalah

$$\varphi_\theta(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right) \quad (18)$$

Dengan mencari solusi persamaan (10) berdasarkan (18), parameter θ copula Frank adalah

$$\tau = 1 - \frac{4\left(1 - \theta^{-1}\int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1}\,dt\right)}{\theta} \quad (19)$$

Copula AMH (Ali-Mikhail-Haq) dinyatakan oleh

$$C_{A,\theta} = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)} \quad (20)$$

dengan $\theta \in [-1, 1)$. Fungsi pembangkit copula AMH adalah

$$\varphi_\theta(t) = ln\left[\frac{1 - \theta(1-t)}{t}\right] \quad (21)$$

Berdasarkan (10) dan (21), parameter θ copula AMH diperoleh dari solusi persamaan

$$\tau = \frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1-\theta)^2 ln(1-\theta)}{3\theta^2} \quad (22)$$

Perolehan θ pada (19) dan (22) menggunakan metode bagi dua seperti dijelaskan pada [8].

2.7. *Goodness of Fit Test* (Uji Kecocokan) untuk Distribusi Bivariat atau Copula

Uji kecocokan diperlukan untuk mengetahui seberapa cocok distribusi bivariat atau copula mencerminkan perilaku data. Kecocokan data terhadap suatu fungsi distribusi bivariat atau copula bergantung pada nilai statistik terkecil *Cramér-von Mises* (S_n) dari beberapa fungsi distribusi bivariat atau copula yang dicocokkan dengan dibantu simulasi *parametric bootstrap* [1]. Nilai S_n tersebut diperoleh dari

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n}\left[H_e(x_i,y_i) - H_{\hat\theta}(x_i,y_i)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[C_e(F(x_i),G(y_i)) - H_{\hat\theta}(F(x_i),G(y_i))\right]^2 \quad (23) \end{aligned}$$

dengan $H_e(x_i,y_i) = C_e(F(x_i),G(y_i)) = \frac{\#(x \le x_i, y \le y_i)}{n+1}$ adalah fungsi distribusi bivariat empiris atau Copula empiris untuk data, $\{(x_i,y_i)\}, i = 1,2,\dots,n$. Fungsi $\#(x \le x_i, y \le y_i)$ menyatakan banyaknya data bivariat $\{(x_i,y_i)\}$ dengan $x \le x_i$ dan $y \le y_i$.

2.8. *Parametric Bootstrap* untuk Ukuran Statistik *Cramer-von Mises*

Ukuran statistik dan *p-value Cramér-von Mises* (S_n) dapat diperoleh melalui metode simulasi *parametric bootstrap* [1]. Algoritma *parametric bootstrap* dijabarkan sebagai berikut:

Diketahui data bivariat sebanyak n pasang yaitu $\{(x_a,y_a)\}, a = 0,1,2,3,\dots,n.$ Untuk N bilangan bulat positif sangat besar,

1. Bangkitkan n sampel acak bivariat $\{(x_i,y_i)\}$ dengan $i = 0,1,2,\dots,n$ dari suatu distribusi bivariat $H_\theta(x,y)$atau Copula $C_\theta\big(F(x),G(y)\big)$, masing-masing terdapat di [7],
2. Hitung $H_e(x_i,y_i) = C_e\big(F(x_i),G(y_i)\big) = \frac{\#(x_a \le x_i, y_a \le y_i)}{n+1}$ dengan $\#(x_a \le x_i, y_a \le y_i)$ adalah banyak data bivariat $\{(x_a,y_a)\}$ dengan $x_a \le x_i$ dan $y_a \le y_i$,
3. Untuk $j = 1$, hitung

$$\begin{aligned} s_{n,j}^* &= \sum_{i=1}^{n}\left[H_e(x_i,y_i) - H_\theta(x_i,y_i)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[C_e\big(F(x_i),G(y_i)\big) - C_\theta\big(F(x_i),G(y_i)\big)\right]^2 \quad (24) \end{aligned}$$

4. Untuk $j = j + 1$, ulangi poin 1 sampai poin 3, ke poin 5 jika $j = N + 1$,
5. Hitung *p-value*, $\frac{\#(s_{n,j}^* > s_n)}{N}$ atau $\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{I(s_{n,j}^* > s_n)}{N}\right)$, yang mana $I\big(s_{n,j}^* > s_n\big)$ adalah fungsi bernilai 1 untuk nilai $s_{n,j}^* > s_n$.

2.9. Metode Penelitian

Disini dilakukan pengolahan data yang dimiliki melalui langkah-langkah berikut:

1. Menghitung umur komponen *oil filter* dalam satuan hari yang dihitung dari tanggal saat reparasi dikurangi tanggal reparasi sebelumnya atau tanggal beli mobil jika reparasi pertama kali,

2. Menghitung penggunaan komponen *oil filter* dalam satuan kilometer (diperoleh dari odometer) yang dihitung dari saat reparasi dikurangi kilometer saat reparasi sebelumnya atau 0 (nol) kilometer jika reparasi pertama kali,
3. Mengubah data umur (dalam hari) kegagalan pertama komponen *oil filter* ke dalam satuan tahun (dibagi 360) lalu disebut data marginal X_1,
4. Mengubah data penggunaan (km) kegagalan pertama komponen *oil filter* ke dalam satuan per 10000 kilometer lalu disebut data marginal Y_1.

Setelah dilakukan pengolahan data, langkah selanjutnya adalah analisis data marginal X_1 dan Y_1 berdasarkan langkah-langkah berikut:

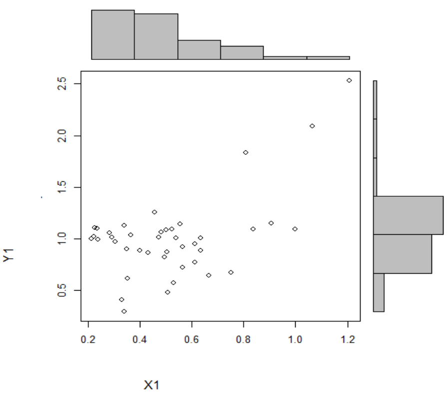
i. Mencari distribusi kegagalan dari masing-masing data marginal X_1 dan Y_1,
ii. Menghitung keterhubungan data marginal X_1 dan Y_1 melalui Kendall's *tau*,
iii. *Goodness of fit test* marginal dilakukan untuk:
   a. Estimasi parameter distribusi marginal X_1 dan Y_1 menggunakan *maximum log-likelihood estimation* (MLE) seperti pada [9],
   b. Uji kecocokan distribusi marginal X_1 dan Y_1 menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov seperti dijabarkan oleh [9],

Langkah selanjutnya adalah estimasi parameter copula Archimedean yang dilakukan berdasarkan Kendall's *tau*. Setelah diperoleh pilihan distribusi marginal X_1 dan Y_1 pada langkah (iii) dan parameter distribusi bivariat atau copula Archimedean, maka selanjutnya melakukan uji kecocokan berdasarkan statistik *Cramér-von Mises* untuk kecocokan model-model distribusi bivariat atau copula Archimedean.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3. 1. Data Marginal

Setelah melalui pengolahan, data kegagalan pertama *oil filter* dilihat dari umur X_1 (tahun) dan penggunaan Y_1 (10000 km) disajikan pada Gambar 1.



Gambar 1. *Scatterplot* Data X_1 dan Y_1

Gambar 1 merupakan *scatterplot* (X_1, Y_1) dari data umur X_1 dan penggunaan Y_1 komponen *oil filter* saat kegagalan pertama. Histogram masing-masing marginal ditampilkan sebelah atas (umur) dan kanan (penggunaan) *scatterplot* pada Gambar 1.

3. 2. *Goodness of Fit Test* Marginal X_1 dan Y_1

Bagian ini diberikan taksiran parameter-parameter (melalui MLE) dan uji kecocokan Kolmogorov-Smirnov (*p-value*) untuk pilihan distribusi-distribusi marginal (untuk peubah acak kontinu tak negatif) berdasarkan data X_1 dan Y_1 yang disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter dan Uji Kecocokan Kolmogorov-Smirnov (*p-value*) Distribusi Marginal Data

Dist.	Marg.	Parameter		*p-value* (KS)
Weibull	X_1	$\widehat{\alpha_1} = 2.645$	$\widehat{\beta_1} = 0.566$	0.9401
Lognorm.		$\widehat{\mu_1} = -0.751$	$\widehat{\sigma_1} = 0.441$	0.8992
Gamma		$\widehat{\alpha_1} = 4.788$	$\widehat{\beta_1} = 0.109$	0.9340
Eksp.		$\widehat{\lambda_1} = 1.922$		1.4×10^{-4}
Weibull	Y_1	$\widehat{\alpha_2} = 3.153$	$\widehat{\beta_2} = 1.088$	0.0603
Lognorm.		$\widehat{\mu_2} = -0.064$	$\widehat{\sigma_2} = 0.376$	0.0800
Gamma		$\widehat{\alpha_2} = 6.380$	$\widehat{\beta_2} = 0.158$	0.0376
Eksp.		$\widehat{\lambda_2} = 0.947$		2.6×10^{-5}

Berdasarkan Tabel 1, keluarga distribusi Eksponensial gagal untuk memodelkan marginal X_1 dan Y_1 karena hipotesis H_0 ditolak di tingkat signifikansi 0.05. Begitu pula distribusi Gamma gagal untuk memodelkan marginal Y_1 karena hipotesis H_0 ditolak di tingkat signifikansi 0.05. Meski begitu, model copula Archimedean untuk marginal-marginal tersebut tetap akan diestimasi. Copula Archimedean (Clayton, Gumbel, Frank, dan AMH) diestimasi untuk kombinasi marginal X_1: Weibull, Lognormal, Gamma, dan Eksponensial; dan Y_1: Weibull, Lognormal, Gamma, dan Eksponensial. Dari sini, akan diestimasi distribusi bivariat Weibull Lu-Bhattacharyya karena di tingkat signifikansi 0.05, distribusi Weibull mampu memodelkan marginal X_1 dan Y_1.

3. 3. Kendall's *Tau* dari Data X_1 dan Y_1

Kendall's *tau* data X_1 dan Y_1 tertampil di Tabel 2.

Tabel 2. Ukuran Keterhubungan Kendall's *Tau* dari Data Marginal X_1 dan Y_1

Marginal	Kendall's *Tau*
$\boldsymbol{X_1}$ dan $\boldsymbol{Y_1}$	$\tau = 0.0880$

3. 4. Estimasi Parameter Distribusi Bivariat Weibull Lu-Bhattacharyya (LB)

Fungsi survival bivariat Lu-Bhattacharyya pada (5) merupakan copula Gumbel dengan marginal-marginalnya adalah fungsi survival Weibull. Parameter distribusi bivariat Weibull Lu-Bhhattacharyya yang bersesuaian dengan parameter copula Gumbel adalah $\delta = 1/\theta$. Sehingga parameter distribusi bivariat Weibull Lu-Bhhattacharyya δ dapat diperoleh dengan terlebih dahulu mengetahui parameter copula Gumbel.

3. 5. Estimasi Parameter Copula Archimedean

Estimasi parameter copula Archimedean yang terdiri dari copula Clayton, Gumbel, Frank, dan AMH diperoleh dengan menggunakan ukuran keterhubungan Kendall's *tau*. Parameter distribusi bivariat Weibull Lu-Bhattacharyya (LB) diperoleh berdasarkan parameter copula Gumbel. Tabel 3 berisi estimasi parameter-parameter tersebut.

Tabel 3. Parameter Copula Archimedean dan Distribusi Bivariat Weibull LB

$\hat{\theta}$				$\hat{\delta}$
Clayton	Gumbel	Frank	AMH	Biv. Wei. LB
0.193	1.096	0.797	0.358	0.912

3. 6. Uji Kecocokan Distribusi Biv. Weibull LB dan Copula Archimedean

Uji kecocokan model distribusi bivariat dan copula dilakukan berdasarkan parameter di Tabel 3 dan marginal-marginal di Tabel 1 melalui statistik *Cramèr-von Mises* S_n dan *p-value* dari *parametric bootstrap*. Tabel 4 berisi statistik $\widehat{S_n}$ model-model tersebut.

Tabel 4. Statistik *Cramér-von Mises* $\widehat{S_n}$ Model-Model Distribusi Bivariat

Dist. Marginal		$\widehat{S_n}$				
		Clayton	Gumbel	Frank	AMH	Biv. Wei. LB
Weibull	Weibull	0.184	0.172	0.178	0.179	0.181
Weibull	Lognorm	0.183	0.172	0.179	0.180	-
Weibull	Gamma	0.204	0.193	0.199	0.200	-
Weibull	Eksp.	0.597	0.606	0.607	0.598	-
Lognorm	Lognorm	0.197	0.187	0.196	0.197	-
Lognorm	Weibull	0.192	0.179	0.187	0.189	-
Lognorm	Gamma	0.217	0.205	0.214	0.215	-
Lognorm	Eksp.	0.669	0.658	0.670	0.657	-
Gamma	Gamma	0.220	0.214	0.205	0.216	-
Gamma	Lognorm	0.198	0.118	0.193	0.195	-
Gamma	Weibull	0.196	0.181	0.189	0.191	-
Gamma	Eksp.	0.633	0.625	0.632	0.619	-
Eksp.	Eksp.	1.329	1.303	1.331	1.299	-
Eksp.	Weibull	0621	0.616	0.619	0.597	-
Eksp.	Lognorm	0.665	0.661	0.666	0.642	-
Eksp.	Gamma	0.684	0.674	0.638	0.659	-

Langkah selanjutnya adalah melakukan simulasi *parametric bootstrap* sebanyak 100 kali untuk menaksir rata-rata *p-value* dan seberapa banyak H_0 diterima dalam pengulangan tersebut. Tabel 5 menunjukkan jumlah H_0 yang diterima, rata-rata nilai *p-value,* dan standar deviasi *p-value* setelah dilakukan pengulangan sebanyak 100 kali.

Setelah dilakukan pengulangan dan untuk tingkat signifikansi 0.05, model distribusi bivariat atau copula yang memiliki rata-rata *p-value* terbesar adalah model copula Clayton dengan $\hat{\theta} = 0.1930$ yang memodelkan marginal $X_1 \sim \text{Weibull}(\widehat{\alpha_1} = 2.6446, \widehat{\beta_1} = 0.5663)$ dan marginal $Y_1 \sim \text{Lognormal}(\widehat{\mu_2} = -0.0636, \widehat{\sigma_2} = 0.3761)$ dengan fungsi distribusi, densitas, dan *contour* model tersebut disajikan pada Gambar 2.

3. 7. Ekspektasi Banyak Kegagalan dan Estimasi Biaya Garansi

Setelah diperoleh model terbaik adalah model copula Clayton dengan marginal X_1 Weibull dan Y_1 Lognormal, maka ekspektasi banyak kegagalan di dua dimensi untuk *oil filter* bergaransi polis FRW dengan strategi penggantian dapat dihitung. Ekspektasi banyak kegagalan *oil filter* pada masa garansi $[0,k) \times [0,l)$ polis FRW dengan strategi penggantian dinyatakan oleh

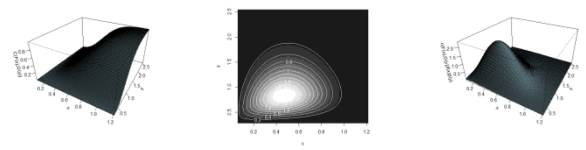
$$E[N_2(k,l)] = \widehat{M}_{C_C,\hat{\theta}}(k,l) \qquad (25)$$

dengan

$$\widehat{M}_{C_c,\hat{\theta}}(k,l) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big[\Big(1 + \widehat{M}\big(x_{i-1}, y_{j-1}\big)\Big) \times \Delta_{x_{i-1}}^{x_i} \Delta_{y_{j-1}}^{y_j} C_{C,\hat{\theta}}\big(F(x-a), G(y-b)\big)\Big] \quad (26)$$

serta $C_{C,\hat{\theta}}(u,v)$ seperti pada (11) dan $\hat{\theta} = 0.1930$ untuk F dan G berurutan marginal:

$$X_1 \sim \text{Weibull}(\widehat{\alpha_1} = 2.6446, \widehat{\beta_1} = 0.5663)$$
$$Y_1 \sim \text{Lognormal}(\widehat{\mu_2} = -0.0636, \widehat{\sigma_2} = 0.3761)$$



Fungsi Distribusi *Contour* Densitas Fungsi Densitas

Gambar 2. Bivariat Copula Clayton $\hat{\theta} = 0.1930$ untuk Marginal $X_1 \sim \text{Weibull}(\widehat{\alpha_1} = 2.6446, \widehat{\beta_1} = 0.5663)$dan $Y_1 \sim \text{Lognormal}(\widehat{\mu_2} = -0.0636, \widehat{\sigma_2} = 0.3761)$

Tabel 5. Hasil Pengulangan *Parametric Bootstrap* 100 Kali untuk *p-value Cramér-von Mises* $\widehat{S_n}$

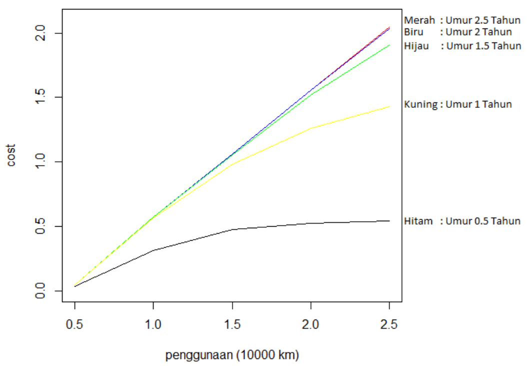
Marg.	Hasil	AMH	Clayton	Frank	Gumbel	Biv. Wei. LB
Weibull Weibull	H_0acc	100	100	100	100	100
	p-val	0.679	0.704	0.671	0.630	0.668
Weibull Lognorm.	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.790	0.814	0.786	0.754	-
Weibull Gamma	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.712	0.738	0.707	0.659	-
Weibull Eksp.	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.670	0.742	0.617	0.653	-
Lognorm. Lognorm.	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.635	0.668	0.629	0.599	-
Lognorm. Weibull	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.543	0.568	0.535	0.498	-
Lognorm. Gamma	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.554	0.587	0.551	0.506	-
Lognorm. Eksp.	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.479	0.556	0.460	0.425	-

Gamma Lognorm.	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.723	0.742	0.718	0.688	-
Gamma Weibull	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.066	0.661	0.641	0.601	-
Gamma Gamma	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.660	0.673	0.654	0.610	-
Gamma Eksp.	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.626	0.700	0.608	0.575	-
Eksp. Eksp.	H_0acc	31	100	5	2	-
	p-val	0.046	0.081	0.039	0.037	-
Eksp. Weibull	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.483	0.556	0.474	0.495	-
Eksp. Lognorm.	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.421	0.491	0.407	0.402	-
Eksp. Gamma	H_0acc	100	100	100	100	-
	p-val	0.335	0.413	0328	0.320	-

Selanjutnya, ekspektasi tersebut ditampilkan pada Tabel 6. Terlihat pada Tabel 6 bahwa banyak kegagalan *oil filter* meningkat seraya umur dan penggunaan meningkat. Gambar 3 merupakan grafik peningkatan ekspektasi banyak kegagalan *oil filter* berdasarkan penggunaan untuk tiap umur tertentu. Dalam hal ini, 0,5 tahun setara dengan 6 bulan. Sebagai contoh, bilangan 1,5 tahun berarti 1 tahun 6 bulan.

Tabel 6. Ekspektasi Banyak Kegagalan berdasarkan Model pada (26)

		Batas Penggunaan (10000 km)					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
Batas Umur (Tahun)	0.5	0.032	0.311	0.474	0.524	0.539	0.543
	1	0.047	0.566	0.983	1.261	1.428	1.506
	1.5	0.047	0.574	1.055	1.518	1.906	2.185
	2	0.047	0.574	1.061	1.554	2.032	2.471
	2.5	0.047	0.574	1.061	1.556	2.049	2.536



Gambar 3. Grafik Estimasi Biaya Garansi *Oil Filter* berdasarkan Penggunaan untuk Umur Tertentu

Misalkan harga *oil filter* baru adalah seharga $\ell =$ 30000 Rupiah, maka Tabel 7 berisi estimasi biaya garansi *oil filter* mobil untuk masa garansi dua dimensi tertentu. Terlihat pada Tabel 7 bahwa estimasi biaya (dalam Rupiah) garansi *oil filter* mobil meningkat seraya umur dan penggunaan meningkat.

Tabel 7. Estimasi Biaya (dalam Rupiah) Garansi Dua Dimensi *Oil Filter* berdasarkan Model pada (26)

		Batas Penggunaan (10000 km)					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
Batas Umur (Tahun)	0.5	966	9342	14232	15735	16173	16293
	1	1404	16986	29481	37836	42828	45192
	1.5	1413	17205	31644	45540	57189	65550
	2	1413	17208	31380	46623	60951	74145
	2.5	1413	17208	31830	46689	61470	76083

4. KESIMPULAN

Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh model dan biaya garansi dua dimensi polis *non-renewing free replacement warranty* dengan strategi penggantian untuk *oil filter* mobil. Tujuan penelitian ini telah diperoleh dua hal. Pertama, model biaya garansi dua dimensi tersebut melibatkan copula Clayton dengan parameter $\hat{\theta} = 0.1930$ untuk marginal umur $X_1 \sim \text{Weibull}(\widehat{\alpha_1} = 2.6446, \widehat{\beta_1} = 0.5663)$ dan penggunaan $Y_1 \sim \text{Lognormal}(\widehat{\mu_2} = -0.0636, \widehat{\sigma_2} = 0.3761)$. Model ini diperoleh melalui tahapan-tahapan: estimasi parameter distribusi bivariat berdasarkan Kendall's *tau*, seleksi model distribusi bivariat melalui uji statistik *Cramèr-von Mises* S_n, dan *p-value* statistik tersebut melalui simulasi *parametric bootstrap*. Pemodelan melibatkan copula mengakibatkan model-model distribusi bivariat semakin banyak pilihan atau bervariasi sesuai dengan kebutuhan untuk memodelkan data yang memiliki marginal-marginal berbeda keluarga distribusi. Kedua, berdasarkan model biaya garansi yang telah diperoleh, ekspektasi banyak kegagalan *oil filter* di masa garansi dua dimensi tertentu dapat dihitung dengan menggunakan metode *mean value theorem for integrals*. Biaya garansi dua dimensi polis *non-renewing free replacement warranty* dengan strategi penggantian *oil filter* mobil dapat dihitung. Biaya tersebut merupakan perkalian dari harga *oil filter* dengan ekspektasi banyak kegagalan. Ekspektasi banyak kegagalan ditampilkan pada Tabel 6. Sedangkan estimasi biaya garansi ditampilkan pada Tabel 7.

REFERENSI

[1] L. R. Sasongko, "Copula untuk Memodelkan Kegagalan Dua Dimensi pada Produk Bergaransi dengan Strategi Penggantian," M.Si. tesis, Program Pascasarjana Magister Aktuaria, Institut Teknologi Bandung, Bandung, 2014.

[2] W. R. Blischke, M. R. Karim, dan D. N. P. Murthy, *Warranty Data Collection and Analysis*, London: Springer Series in Reliability Eng., 2011, bab 2.

[3] J. Baik, D. N. P. Murthy, dan N. Jack, "Two-Dimensional Failure Modelling with Minimal Repair," *Naval Research Logistics*, vol. 51, no. 3, pp. 345-362, Nov. 2004.

[4] J. C. Lu, dan G. K. Bhattacharyya, "Some New Contructions of Bivariate Weibull Models," *Ann.*

Inst. Statist. Math, vol. 42, no. 3, pp. 543-559, Sept. 1990.
[5] J. J. Hunter, J. J., "Renewal Theory in Two Dimensions: Basic Results," *Adv. Appl. Probab*, vol. 6, pp. 376-391, 1974.
[6] S. C. Yang, "A Bivariate Renewal Process And Its Application in Maintenance Policies," Ph.D. Dissertation, Faculty of Virginia Polytechnic Inst. and State University, Blacksburg-Virginia, 1999.
[7] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, New York: Springer Series in Statistics, 2006.
[8] D. B. Nugroho, "Metode Numerik", unpublished.
[9] Y. K. Tse, *Nonlife Actuarial Models: Theory, Methods, and Evaluation*, New York: Cambridge University Press, 2009.

Lampiran A. Fungsi Distribusi Univariat

Pada bagian ini akan diberikan fungsi distribusi univariat yang digunakan dan dituliskan dalam penelitian ini. Misalkan X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi distribusi F_X.

1. Lognormal dua parameter, $X \sim Lognormal(\sigma, \mu)$,
$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$
2. Weibull dua parameter, $X \sim Weibull(\alpha, \beta)$,
$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right)$$
3. Gamma dua parameter, $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$,
$$F_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} \exp(-\beta t)\, dt$$
4. Eksponensial satu parameter, $X \sim Eksp.(\lambda)$,
$$F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x).$$

Nur Rohman lahir dan tinggal di Getasan, Kab. Semarang.
Dia masih menempuh pendidikan tinggi di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana (UKSW) Salatiga. Tahun 2018 adalah tahun terakhir ia menempuh studi. Makalah ini merupakan hasil penelitian skripsinya yang dipublikasikan.

Tundjung Mahatma lahir di Salatiga, Indonesia dan tinggal di sana sampai dengan kini. Gelar Sarjana Pendidikan diperolehnya dari Universitas Kristen Satya Wacana (UKSW) Salatiga, dan pada 1990/1991 bertugas studi dan mendapatkan Postgraduate Diploma in Computing dari University of Essex, Inggris. Pada 2007 dia memperoleh gelar Master Ilmu Komputer (M.Kom.) dari Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.
Dia telah bekerja pada unit-unit yang berkenaan dengan Teknologi Informasi di UKSW, lalu pada tahun 2000 mengajar secara penuh di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, UKSW.

Leopoldus Ricky Sasongko lahir di Ketapang, Kalimantan Barat, pada tanggal 14 November 1989. Pada tahun 2011, gelar Sarjana Sains (S.Si) diperoleh dari Universitas Kristen Satya Wacana (UKSW) Salatiga. Gelar Magister Sains (M.Si) didapat dari Program Pascasarjana Magister Aktuaria, Institut Teknologi Bandung (ITB), pada tahun 2014.
Ia bekerja di UKSW sejak tahun 2011 sebagai Calon Pengajar Akademik (Dosen) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, UKSW. Saat ini, ia menjadi Pengajar Akademik Tetap di UKSW.
Sasongko, M.Si, merupakan salah satu anggota Asosiasi Matematikawan Indonesia, IndoMS. Bidang penelitian yang digeluti adalah Matematika Aktuaria dan Garansi (*Warranty*). Salah satu makalah hasil penelitian adalah *The Estimation of Renewal Functions Using the Mean Value Theorem for Integrals (MeVTI) Method* yang terpublikasi di Jurnal Matematika dan Aplikasi deCartesiaN, Universitas Sam Ratulangi (UNSRAT).